

terschiedliche Verbreiterung der Seitenbandresonanzen läßt sich für eine Messung von T_1 ausnutzen.

Zum Vergleich der Empfindlichkeit werden die relativen Signalamplituden unter entsprechenden Voraussetzungen für die in der Einführung aufgeführten Kernresonanznachweismethoden angegeben. Die Signale werden bei optimaler Einstellung von H_1 (Sättigungsverbreiterung höchstens $\sqrt{2}$) in Magnetisierungseinheiten berechnet. Dann ergibt sich folgendes Bild:

(I) *Statistischer Nachweis (lineare Abtastung oder langsame Modulation großer Amplitude)*

$$\text{Signal} \sim (M_0/2) \sqrt{T_2^*/T_1}; \quad \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2^* = 1,$$

natürliche Linienform um $\sqrt{2}$ verbreitert; breitbandige Verstärkung erforderlich.

(II) *Lineare Abtastung mit schwacher Modulation*

$$(\gamma H_m T_2^*, \quad \omega_m T_2^*, \quad x \ll 1)$$

damit Modulationsverbreiterung $\leq 1\%$:

$$\gamma H_m T_2^* \leq 0,2.$$

$$\text{Signal} \sim (M_0/2) \gamma H_m T_2^* \sqrt{T_2^*/T_1} = 0,1 M_0 \sqrt{T_2^*/T_1},$$

$$\gamma^2 H_1^2 T_1 T_2^* = 1/2,$$

Linienform entspricht der 1. Ableitung der Resonanz, um $\sqrt{3/2}$ verbreitert; schmalbandige Verstärkung möglich.

(III) „Schnelle“ Modulation

$$u_0\text{-Signal} \sim 0,82 M_0 \sqrt{T_2^*/T_1},$$

$$\gamma^2 H_1^2 T_1 T_2^* = 4, \quad x = 1,48,$$

$$u_{\pm 1}\text{-Signal} \sim 0,71 M_0 \sqrt{T_2^*/T_1},$$

$$\gamma^2 H_1^2 T_1 T_2^* = 16, \quad x = 0,52,$$

$$v_{\pm 1}\text{-Signal} \sim 0,5 M_0 \sqrt{T_2^*/T_1},$$

$$\gamma^2 H_1^2 T_1 T_2^* = 16, \quad x = 0,52,$$

natürliche Linienformen um $\sqrt{2}$ verbreitert, schmalbandige Verstärkung möglich.

Diese Überlegungen zeigen, daß die schnelle Modulationsmethode nicht nur für Anwendungen in Frage kommt, bei denen (I) zu unempfindlich ist und für (II) die Linien zu eng sind, sondern auch neben (II) für die Spektroskopie breiterer Linien. Außer der besseren Empfindlichkeit bestehen von Fall zu Fall besondere Vorteile — wie die Eichmöglichkeit der Linienbreite, die Vermeidung einer Integration von Ableitungskurven, der Nachweis von u -Signalen, eine leichtere Meßmöglichkeit für H_1 und die Relaxationszeiten — welche eine schnelle Modulation nahelegen. Ihre Verwendung und die Deutung der Signale erscheint unter Benutzung der hier gegebenen Ergebnisse kaum schwieriger als die anderer Verfahren.

Zur Theorie der Kernrotationen* I

VON HANS HACKENBROICH

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforsch. 16 a, 1068—1076 [1961]; eingegangen am 9. Oktober 1958)

In das INGLISCHE Modell rotierender Kerne wird der von NILSSON vorgeschlagene Ausdruck für das Potential im Kern eingeführt. Aus dem Modell werden dann Eigenzustände, Gleichgewichtsdeformationen und Trägheitsmomente von g -Kernen aus dem Bereich der seltenen Erden sowohl störungstheoretisch wie numerisch „exakt“ berechnet. Die berechneten Trägheitsmomente sind zwar stets größer als die gemessenen, aber der Gang der berechneten Verformungen und Trägheitsmomente stimmt mit der Erfahrung befriedigend überein.

In den vergangenen Jahren sind die im wesentlichen auf BOHR und MOTTELSON¹ zurückgehenden Vorstellungen über die kollektiven Bewegungen

schwerer Kerne durch zahlreiche Experimente² gestützt worden.

Den einfachsten Zugang zu einer genaueren Be-

* Der Aufsatz beruht auf einer der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät zu Göttingen im Winter 1957/58 vorgelegten Diplomarbeit.

¹ A. BOHR, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. 26,

14 [1952]; A. BOHR u. B. MOTTELSON, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. 27, 16 [1953].

² K. ALDER, A. BOHR, T. HUUS, B. MOTTELSON u. A. WINTER, Rev. Mod. Phys. 28, 432 [1956].



schreibung der Kernrotationen bietet wohl eine Idee von INGLIS³. INGLIS nimmt an, im Kern sei ein rotationsellipsoidisches Potential vorgegeben, das mit der Winkelgeschwindigkeit Ω klassisch um eine zur Symmetrieachse senkrechte Achse rotiere. Die Nukleonen des Kernes sollen sich voneinander unabhängig in diesem Potential bewegen; die stationären Zustände des Systems seien die Eigenzustände des Kernes. Führen wir laborfeste Koordinaten \tilde{r} und „potentialfeste“ Koordinaten r so ein, daß die Rotationsachse x -Achse beider Systeme und die Symmetrieachse z -Achse des potentialfesten Systems ist, so schreibt sich die SCHRÖDINGER-Gleichung des Kernes im Laborsystem

$$\tilde{H}(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A, t; \Omega) \tilde{\Psi}(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A, t; \Omega) = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi} \quad (1)$$

und, wegen der Transformation

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= e^{-i\Omega J_x t} H(r_1, \dots, r_A) e^{i\Omega J_x t}, \\ \tilde{\Psi} &= e^{-i\Omega J_x t} \Psi \end{aligned} \quad (1a)$$

im potentialfesten System

$$[H - \hbar \Omega J_x] \hat{\Psi} = \tilde{E}(\Omega) \hat{\Psi}.$$

J_x ist die x -Komponente des Operators für den Gesamtdrehimpuls. Die wirkliche Energie des Kernes ist

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \langle \tilde{\Psi} | \tilde{H} | \tilde{\Psi} \rangle = \tilde{E} + \langle \hat{\Psi} | \hbar \Omega J_x | \hat{\Psi} \rangle \\ &= \hat{E} - \Omega \frac{\partial}{\partial \Omega} \hat{E}. \end{aligned} \quad (2)$$

Nehmen wir an, der Grundzustand des Kernes sei nicht entartet und könne störungstheoretisch nach den Eigenfunktionen Ψ^i von H entwickelt werden, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{E} - \Omega \frac{\partial}{\partial \Omega} \hat{E} &\approx E^0 + \sum_i \frac{|\langle \Psi^0 | \hbar \Omega J_x | \Psi^i \rangle|^2}{E^i - E^0} \\ &= E^0 + \frac{\Theta}{2} \hbar^2, \end{aligned} \quad (2a)$$

Θ ist das Trägheitsmoment des Kernes.

Damit diese Vorschrift zur Berechnung der Trägheitsmomente eindeutig ist, muß gefordert werden⁴,

daß die Achsenverhältnisse des Kernpotentials für jeden Eigenzustand $\hat{\Psi}$ so gewählt werden, daß die zugehörige Energie \hat{E} minimal wird.

Es scheint, als ob die eben angeschriebenen Gleichungen auch durch Betrachtungen gewonnen werden können, die der physikalischen Wirklichkeit besser entsprechen^{3, 5, 6}; die Beziehung des Modells zu den ursprünglichen BOHR-MOTTIELSONSchen Vorstellungen erläutert LÜDERS⁷.

Bei der quantitativen Auswertung des Modells wurde meist angenommen, das Potential im Kern könne durch das eines anisotropen harmonischen Oszillators approximiert werden:

$$V = \frac{M \omega^2}{2} [\lambda^4 x^2 + \lambda^4 y^2 + \lambda^{-8} z^2]. \quad (3)$$

Variiert man λ wie angegeben⁸, so erhält man stets das Trägheitsmoment der starren Rotation⁴.

Das Modell kann verfeinert werden, indem man statt des Potentials (3) ein realistischeres Potential betrachtet. Hierbei müssen sicherlich Kräfte eingeführt werden, die die Abweichung des wirklichen Potentials von einem mittleren Potential beschreiben^{3, 4, 9, 10}. Die Form des mittleren Potentials ist nur im Grenzfall sehr vieler Teilchen für die Größe des Trägheitsmomentes bedeutungslos; die Schalenstruktur der Kerne zeigt jedoch, daß dieser Grenzfall in der Natur nicht verwirklicht ist. Also werden die Trägheitsmomente auch vom mittleren Potential abhängen.

Es erschien daher nützlich, das INGLISSCHE Modell durch Einführung eines passenden mittleren Potentials abzuändern; wir verwenden ein zuerst von NILSSON¹¹ angegebenes mittleres Potential

$$V = \frac{M \omega^2}{2} \{\lambda^4 x^2 + \lambda^4 y^2 + \lambda^{-8} z^2\} + C \cdot l s + D l^2, \quad (4)$$

l bedeutet den Bahndrehimpuls, s den Spin; C und D sind negative Konstanten von der Dimension einer Energie, die in der Rechnung zu

$$C = -0,1 \hbar \omega \quad \text{und} \quad D = -0,0225 \hbar \omega$$

gewählt wurden. $\hbar \omega$ sei $42 \text{ MeV} \times A^{-1/2}$.

³ D. INGLIS, Phys. Rev. **96**, 1059 [1954].

⁴ A. BOHR u. B. MOTTIELSON, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. **30**, 1 [1955].

⁵ F. VILLARS, Nucl. Phys. **3**, 240 [1957].

⁶ L. MEICHSNER, Nucl. Phys. **8**, 493 [1958].

⁷ G. LÜDERS, Z. Naturforsch. **11a**, 617 [1956], **12a**, 353 [1957].

⁸ Unser Deformationsparameter λ hängt mit den Para-

metern ε bei NILSSON und β bei BOHR-MOTTIELSON so zusammen:

$$\varepsilon = 3 \frac{\lambda^6 - 1}{2 \lambda^6 + 1}, \quad \beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} (\lambda^2 - \lambda^{-4}).$$

⁹ S. MOSZKOWSKI, Phys. Rev. **103**, 1328 [1956].

¹⁰ F. VILLARS, Nucl. Phys. **3**, 240 [1957].

¹¹ S. NILSSON, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. **29**, 16 [1955].

Rechenmethoden

Für quantitative Rechnungen werden wir die Einteilchenfunktionen ψ_p zum Potential (4) und ihre Energieeigenwerte ε^p verwenden. Diese Größen sind von NILSSON für verschiedene Potentialverformungen numerisch angegeben worden; leider reichen die Tabellierungen nicht bis zu den größten beobachteten Deformationen. Wir haben daher bei den Schalen 4, 5 und 6 die Tabellen auf die Deformationen $\lambda=1,061$ und $\lambda=1,075$ ausgedehnt¹². Die Wellenfunktionen Ψ^i können unter Benutzung der Einteilchenfunktionen ψ_p als SLATER-Determinante geschrieben werden; trotzdem sind sie sehr unhandlich, da alle Matrixelemente zwischen ihnen nur numerisch angegeben werden können.

Für qualitative Überlegungen benutzen wir daher eine Störungsentwicklung: Wir schreiben die Funktionen Ψ^i als Linearkombination von SLATER-Determinanten Φ^i , die jeweils aus Einteilchenfunktionen φ_p zum Potential (3) gebildet sein sollen. Die Einteilchenfunktionen φ_p seien die der Symmetrie des Potentials (3) angepaßten Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_p &\equiv \eta |n_{zp}, n_{\perp p}, m_p, \text{sig } s_{zp}\rangle \\ &= \eta \left(\frac{M\omega}{\pi \hbar} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{(n_{\perp p} - |m_p|/2)!}{n_{zp}! 2^{n_{zp}} (n_{\perp p} + |m_p|/2)!}} \\ &\cdot e^{i m_p \vartheta} e^{-\zeta^2/2} H_{n_{zp}}(\zeta) Q^{|m_p|/2} e^{-\varrho/2} L_{n_{\perp p} - |m_p|/2}^{m_p}(\varrho) S. \end{aligned} \quad (5)$$

Es sei $\vartheta = \arctg y/x$, $\varrho = \frac{M\omega}{\hbar} \lambda^2 (x^2 + y^2)$ und $\zeta = \sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} \lambda^{-2} z$; n_{zp} , $n_{\perp p}$ und $n_{\perp p} - |m_p|/2$ sind nichtnegative ganze Zahlen¹³. S ist eine Spinfunktion, η ein Phasenfaktor (CONDON-SHORTLEY-Phasen).

Der Erwartungswert der Energie ε_p dieser Einteilchenzustände im Potential (4) lautet

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \hbar \omega \left\{ (n_{\perp p} + 1) \lambda^2 + (n_{zp} + \frac{1}{2}) \lambda^{-4} \right\} + C(m_p s_{zp}) \\ &\quad + D \{ m_p^2 + (\lambda^6 + \lambda^{-6}) (n_{zp} n_{\perp p} + n_{zp} \\ &\quad + n_{\perp p}/2) + \frac{1}{2} (\lambda^3 - \lambda^{-3})^2 \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Wir benötigen noch die folgenden Matrixelemente der Funktionen (5):

$$\begin{aligned} \langle n_z, n_{\perp}, m, \pm | j_x | n_z - 1, n_{\perp} + 1, m + 1, \pm \rangle \\ = + \frac{1}{4} \sqrt{n_z} \sqrt{n_{\perp} + m + 2} (\lambda^3 + \lambda^{-3}), \\ \langle n_z, n_{\perp}, m, \pm | j_x | n_z - 1, n_{\perp} + 1, m - 1, \pm \rangle \\ = + \frac{1}{4} \sqrt{n_z} \sqrt{n_{\perp} - m + 2} (\lambda^3 + \lambda^{-3}); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \langle n_z, n_{\perp}, m, \pm | s l | n_z - 1, n_{\perp} + 1, m \pm 1, \mp \rangle \\ = \frac{1}{4} \sqrt{n_z} \sqrt{n_{\perp} \mp m + 2} (\lambda^3 + \lambda^{-3}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle n_z, n_{\perp}, m, \pm | l^2 | n_z - 2, n_{\perp} + 2, m, \pm \rangle \\ = \frac{1}{8} \sqrt{n_z (n_z - 1)} \sqrt{(n_{\perp} + 2)^2 - m^2} (\lambda^3 + \lambda^{-3})^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Matrixelemente zwischen Funktionen verschiedener Schalen sind gegenüber den hier angeschriebenen Matrixelementen klein.

I. Die Gleichgewichtsdeformation

1. Die Rechenvorschrift

Wir wollen im Rahmen einer Störungstheorie die Gleichgewichtsdeformation eines Kernes in einer bestimmten Konfiguration berechnen. Wir nehmen dazu an, diese Verformung hänge nicht vom Rotationszustand ab; für unsere Betrachtung genügt dann folgender Ansatz:

$$\hat{\Psi}^i = \Phi^i + \sum_{j \neq i} \sum_{v=1}^A \frac{\langle \Phi^i | C l_v s_v + D l_v^2 | \Phi^j \rangle}{\Delta E^{ij}}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E^i &= \langle \Phi^i | T + \frac{1}{2} V | \Phi^i \rangle \\ &\quad + \sum_{j \neq i} \sum_{v=1}^A \frac{|\langle \Phi^i | C l_v s_v + D l_v^2 | \Phi^j \rangle|^2}{\Delta E^{ij}} \\ &= \sum_p \langle \varphi_p | T_p + \frac{1}{2} V_p | \varphi_p \rangle \\ &\quad + \sum_p \sum_q \frac{|\langle \varphi_p | C l s + D l^2 | \varphi_q \rangle|^2}{\varepsilon_p - \varepsilon_q}. \end{aligned} \quad (11)$$

Wir summieren über alle Funktionen φ_p aus Φ^i und alle Funktionen φ_q , die nicht in Φ^i liegen.

Zur Begründung dieser Gleichungen sind zwei Bemerkungen wesentlich: Erstens nehmen wir an, unser Potential (4) sei aus nach HARTREE gemittelten Zweiteilchenwechselwirkungen entstanden; dann dürfen wir bei der Berechnung der Gesamtenergie eines Kernes nur die halbe potentielle Energie der Einzel-nukleonen aufsummieren. Zweitens wollen wir in die Energienenner nicht die Energien nullter, sondern erster störungstheoretischer Näherung einsetzen¹⁴; dies ist für unsere Betrachtungen wichtig.

Für die Gleichgewichtsdeformation λ_0 ist $\frac{\partial}{\partial \lambda} E = 0$,

¹² Diese Tabellen sind zusammen mit einer Tabelle der Matrixelemente $|\langle \psi_p | j_x | \psi_{p'} \rangle|$ in beschränkter Zahl im Max-Planck-Institut für Physik erhältlich.

¹³ BATEMAN Manuscript Project, Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill, New York 1954.

¹⁴ P. O. LÖWDIN, J. Chem. Phys. **19**, 1396 [1951].

$$\begin{aligned} \lambda_0^{-6} = & \frac{1}{2} \frac{\sum_p (n_{\perp p} + 1)}{\sum_p (n_{zp} + 1/2)} + \frac{D}{\hbar \omega} (\lambda_0^4 - \lambda_0^{-8}) \\ & \cdot \frac{\sum_p (n_{zp} n_{\perp p} + n_{zp} + n_{\perp p}/2 + 1/2)}{\sum_p (n_{zp} + 1/2)} + \frac{1}{3 \lambda_0 \hbar \omega} \\ & \cdot \frac{1}{\sum_p (n_{zp} + 1/2)} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_p \sum_q \frac{|\langle \varphi_p | C l s + D l^2 | \varphi_q \rangle|^2}{\varepsilon_p - \varepsilon_q} \right]_{\lambda=\lambda_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Wir untersuchen nun die einzelnen Summanden dieser Gleichung.

Es soll angenommen werden, die Massenverteilung im Kern sei rotationsellipsoidisch; wir benötigen dann einen Ausdruck für die Achsen R_x , R_y und R_z dieses Ellipsoides. Zweckmäßigerweise definiert man

$$\begin{aligned} R_x^2 = R_y^2 = & \frac{5}{A} \sum_{v=1}^A \langle x_v^2 \rangle = \frac{5}{A} \frac{\hbar}{M \omega \lambda^2} \sum_p \frac{n_{\perp p} + 1}{2}, \\ R_z^2 = & \frac{5}{A} \frac{\hbar}{M \omega \lambda^{-4}} \sum_p (n_{zp} + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (13)$$

und schreibt damit den mittleren Kernradius R als

$$R = \sqrt[3]{R_x R_y R_z}. \quad (13a)$$

Also ist der erste Term der rechten Seite von (12) gleich $(\lambda^3 R_x/R_z)^2$. Hätten wir statt des Potentials (4) das Oszillatorpotential (3) in das INGLISsche Modell eingeführt – wären also C und D gleich Null –, ergäbe sich einfach

$$R_x/R_z = \lambda_0^{-6}.$$

Die Dichte der Kernmaterie würde dann dieselbe Deformation zeigen wie das Potential⁹.

Der zweite und der dritte Summand der rechten Seite von (12) geben den Einfluß der NILSSONschen Zusatzpotentiale auf die Gleichgewichtsdeformation an. Da alle verformten schweren Kerne positives Quadrupolmoment haben, ist $\lambda_0 > 1$; somit ist der zweite Term der rechten Seite von (12) stets negativ. In erster Näherung bewirkt daher der Term $D l^2$ aus (4) eine Vergrößerung der Gleichgewichtsverformung.

Die Zusatzpotentiale bewirken aber auch eine Abänderung der Wellenfunktionen gegenüber den Eigenfunktionen von (3); der dritte Summand in (12) beschreibt, wie dies die Gleichgewichtsdeformation beeinflusst: Da er stets positiv ist, wird die Deformation verkleinert.

Die einzelnen Beiträge zu diesem Term in (12) haben ganz verschiedenes Gewicht. Wir sehen aus

(8) und (9), daß nur die Glieder wichtig sind, bei denen die Einteilchenfunktionen φ_p und φ_q aus derselben Schale stammen; aus (6) sehen wir, daß wegen der Kleinheit der Energienenner die Glieder überragend wichtig sind, bei denen $n_{\perp p} - |m_p|$ möglichst klein ist: Einteilchenzustände, bei denen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Nukleons eng um die Symmetrieachse des Kerns konzentriert ist, werden durch die Zusatzpotentiale besonders stark abgeändert. Nach (6) sind dies die tiefsten Eigenzustände in jeder Schale.

2. Ein Beispiel

Unsere Rechnungen sollen auf den Kern ${}^{66}\text{Dy}^{94}$ angewendet werden; wir betrachten verschiedene mögliche Konfigurationen.

In den Funktionen Φ^i seien zugleich mit den Einteilchenzuständen $|n_{zp}, n_{\perp p}, m_p, \pm\rangle$ stets die Zustände $|n_{zp}, n_{\perp p}, -m_p, \mp\rangle$ enthalten. Alle Protonenzustände der Schalen 0–3 und alle Neutronenzustände der Schalen 0–4 seien besetzt. In Φ^1 sei zusätzlich aufgefüllt:

Protonenzustände:

$$\begin{aligned} & |400+\rangle |311+\rangle |222+\rangle |133+\rangle |044+\rangle \\ & |311-\rangle |222-\rangle |133-\rangle \\ & |220+\rangle |131+\rangle \\ & |131-\rangle \\ & |500+\rangle |411+\rangle \end{aligned}$$

Neutronenzustände:

$$\begin{aligned} & |500+\rangle |411+\rangle |322+\rangle |233+\rangle |144+\rangle |055+\rangle \\ & |411-\rangle |322-\rangle |233-\rangle \\ & |320+\rangle |231+\rangle \\ & |231+\rangle \end{aligned}$$

In Tab. 1 ist dargestellt, wie die weiteren untersuchten Funktionen Φ^i aus Φ^1 hervorgehen.

Die nach (11) berechneten Energien E^i sind in Abb. 1 in Abhängigkeit von λ dargestellt. Zum Vergleich zeigt Abb. 2 die Energien erster Näherung $E_i = \langle \Phi^i | T + \frac{1}{2} V | \Phi^i \rangle$. Wir ziehen aus diesen Kurven zwei Schlüsse:

a) Es genügt keineswegs, Überlegungen an die erste störungstheoretische Näherung anzuschließen – dies würde nicht einmal den vom Modell geforderten Grundzustand richtig ergeben.

b) Der Wert der Gleichgewichtsdeformation hängt empfindlich von der Annahme über die Konfiguration ab.

	In Φ^i gegenüber Φ^1			
	wegfallende Einteilchenfunktionen		hinzukommende Einteilchenfunktionen	
	Protonen	Neutronen	Protonen	Neutronen
Φ^2	$ 131 - \rangle$		$ 322 + \rangle$	
Φ^3	$ 131 - \rangle$ $ 044 + \rangle$		$ 322 + \rangle$ $ 411 - \rangle$	
Φ^4		$ 055 + \rangle$		$ 600 + \rangle$
Φ^5		$ 055 + \rangle$ $ 321 - \rangle$		$ 600 + \rangle$ $ 511 + \rangle$
Φ^6		$ 055 + \rangle$ $ 321 - \rangle$ $ 233 - \rangle$		$ 600 + \rangle$ $ 511 + \rangle$ $ 422 + \rangle$
Φ^7		$ 055 + \rangle$ $ 231 - \rangle$ $ 233 - \rangle$ $ 231 + \rangle$		$ 600 + \rangle$ $ 511 + \rangle$ $ 422 + \rangle$ $ 511 - \rangle$
Φ^8	$ 131 - \rangle$	$ 055 + \rangle$	$ 322 + \rangle$	$ 600 + \rangle$
Φ^9	$ 131 - \rangle$	$ 055 + \rangle$ $ 321 - \rangle$	$ 322 + \rangle$	$ 600 + \rangle$ $ 511 + \rangle$
Φ^{10}	$ 131 - \rangle$	$ 055 + \rangle$ $ 231 - \rangle$ $ 233 - \rangle$	$ 322 + \rangle$	$ 600 + \rangle$ $ 511 + \rangle$ $ 422 + \rangle$
Φ^{11}	$ 131 - \rangle$	$ 055 + \rangle$ $ 321 - \rangle$ $ 233 - \rangle$ $ 231 + \rangle$	$ 322 + \rangle$	$ 600 + \rangle$ $ 511 + \rangle$ $ 422 + \rangle$ $ 511 - \rangle$

Tab. 1.

Nach unserer Rechnung ist der energetisch tiefste Zustand des ${}_{66}\text{Dy}^{94}$ der Zustand 10 oder der Zustand 11; die genauere numerische Rechnung zeigt, daß es Zustand 10 ist. In diesem Zustand ergibt das Modell eine Gleichgewichtsdeformation von $\lambda_0 \approx 1,053$, dem ein $\beta_0 \approx 0,32$ entspricht; im reinen Oszillatorpotential würde die Gleichgewichtsdeformation rund $\beta_0 \approx 0,38$ sein. Experimentell ergibt sich $\beta_0 \approx 0,35$.

3. Das Quadrupolmoment

In dieser Gleichsetzung von berechneter und gemessener Deformation ist jedoch eine ernsthafte Schwierigkeit enthalten: Wir berechnen – in einer sicherlich angreifbaren Weise – die Verformung des Potentials; gemessen wird jedoch die Verformung der Ladungsverteilung im Kern.

Bei der Auswertung der Experimente wird stets die Annahme gemacht, das innere Quadrupolmoment eines Kernes

$$Q_0 = \frac{z}{A} \langle \hat{\Psi} | \sum_{\nu=1}^A (x_{\nu}^2 + y_{\nu}^2 + z_{\nu}^2) | \Psi \rangle \quad (14)$$

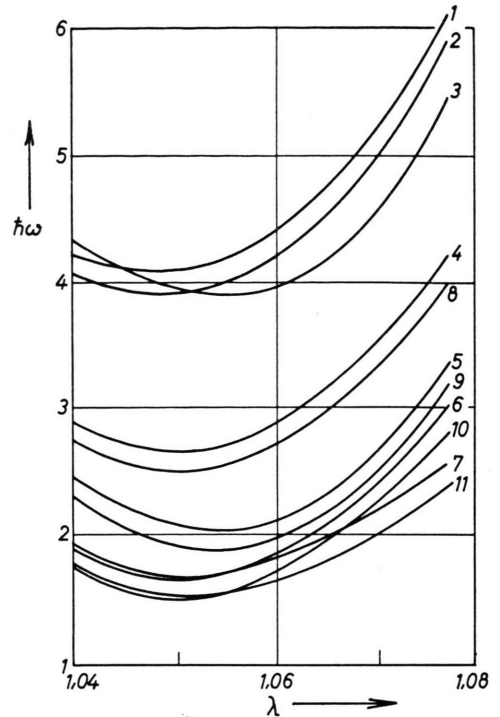


Abb. 1. Die Energien E^i verschiedener Konfigurationen des ${}_{66}\text{Dy}^{94}$ in zweiter störungstheoretischer Näherung. Die Funktionen Φ^i sind im Text (Abschnitt I, 2) beschrieben; der Nullpunkt der Energieskala ist willkürlich gewählt.

sei gleich dem Quadrupolmoment eines homogenen Rotationsellipsoides:

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5}\pi} Z R^2 \beta_0 \left(1 - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0\right). \quad (15)$$

Mit der Abkürzung $\sigma = (\lambda_0^3 R_x / R_z)^2$ folgt jedoch aus (14):

$$Q_0 = \frac{2}{5} Z R^2 \sigma^{-1/2} (\lambda_0^4 - \sigma \lambda_0^{-2}). \quad (16)$$

Unter Benutzung von (12) ergibt sich im Falle des reinen Oszillatorpotentials:

$$Q_{0\text{osz}} = \frac{3}{\sqrt{5}\pi} Z R^2 \beta_0 \left(1 - \frac{11}{8} \sqrt{\frac{1}{5\pi}} \beta_0\right). \quad (17)$$

Das weicht von (15) nur unbedeutend ab. Rechnen wir jedoch das Quadrupolmoment einer Eigenfunktion von (4), so erhalten wir näherungsweise

$$Q_{0\text{Nilsson}} = Q_{0\text{osz}} + \frac{2}{5} Z R^2 (1 - \sigma \lambda_0^6). \quad (18)$$

Wie wir schon aus der Diskussion von (12) erwarten mußten, kann dieser Ausdruck erheblich von (15) verschieden sein. Bei unserem Beispiel ${}_{66}\text{Dy}^{94}$ ist $1 - 8 \lambda_0^6 \approx 0,05$; der aus dem gemessenen Quadru-

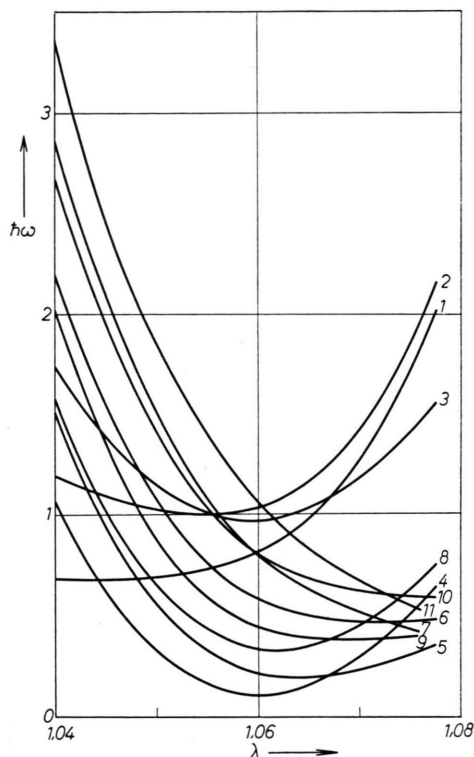


Abb. 2. Die Energien E_i verschiedener Konfigurationen des ${}^{66}\text{Dy}^{94}$. Die Funktionen Φ^i sind im Text (Abschnitt I, 2) beschrieben; der Nullpunkt der Energieskala ist willkürlich gewählt.

polmoment nach (15) berechnete Wert von Q_0 ist somit um 10–15% größer als der nach (18) bestimmte.

Zu dieser Unsicherheit kommen durch die Vernachlässigung der COULOMB- und Paarbildungskräfte weitere hinzu. Wir machen also beim Schluß von gemessenen Q_0 auf das β_0 einen Fehler, der vielleicht 20% ausmachen kann. Aber auch die Experimente sind wahrscheinlich nicht genauer¹⁵.

Unter Berücksichtigung dieses Vorbehaltes ergeben sich aus dem NILSSONschen Modell die Gleichgewichtsdeformationen recht gut, wie zuerst NILSSON und MOTTOLSON gezeigt haben¹⁶.

Im Laufe unserer weiteren Rechnungen werden wir die Konfiguration des Grundzustandes aus analogen Überlegungen bestimmen; wenn verschiedene Konfigurationen nach (11) fast entartet sind, werden wir diejenige als Grundzustand betrachten, deren Deformation der gemessenen am besten ent-

spricht. Da der Unterschied zwischen diesen Verformungen stets kleiner als 10% ist, werden wir zur Berechnung der Trägheitsmomente überall die nach (15) aus dem Experiment bestimmte Verformung benutzen.

II. Das Trägheitsmoment

1. Die Näherung der Störungstheorie

Um eine grobe Übersicht über die Größe der Trägheitsmomente zu gewinnen, ersetzen wir in (2a) die Kerneigenfunktionen durch die nullte Näherung für diese Funktionen:

$$\Theta \approx 2\hbar^2 \sum_p \sum_q \frac{|\langle \varphi_p | j_x | \varphi_q \rangle|^2}{\varepsilon_q - \varepsilon_p}. \quad (2b)$$

Wiederum stellen wir aus (6) und (7) fest, daß die einzelnen Summanden dieser Summe ganz verschiedene Größenordnung haben. Wichtig sind nur die Glieder, bei denen die Funktionen φ_p und φ_q aus derselben Schale stammen; entscheidend sind die Summanden, bei denen die Einteilchenfunktion φ_p in ihrer Schale so tief wie möglich liegt. Die Trägheitsmomente hängen also stark vom Vorhandensein einiger weniger Terme in (2b) und also von der Annahme über die Konfiguration des Kernes ab.

Durch genauen Vergleich von (12) und (2b) stellen wir ferner fest, daß eine Konfiguration, zu der eine große Kerndeformation gehören sollte, auch ein großes Trägheitsmoment besitzen müßte. Obwohl also nach (2b) das Trägheitsmoment bei festgehaltener Konfiguration mit wachsender Teilchenzahl sinkt, kann also doch erklärt werden, daß – roh gesprochen – stark verformte Kerne besonders große Trägheitsmomente besitzen.

Diese Überlegungen können wir uns an Abb. 3 veranschaulichen, die die Trägheitsmomente verschiedener Konfigurationen des ${}^{66}\text{Dy}^{94}$ zeigt. Das Trägheitsmoment starrer Rotation der Konfiguration 10 ist $\Theta_{\text{rig}} \approx 630 \hbar/\omega$.

2. Die g – g-Kerne der seltenen Erden

Die Störungsrechnung der Gl. (2b) ist zu grob, um damit quantitative Resultate zu gewinnen. Wir müssen daher die tabellierten Einteilchenfunktionen ψ_p zum Potential (4) benutzen und schreiben damit

$$\Theta \approx 2\hbar^2 \sum_p \sum_q \frac{|\langle \psi_p | j_x | \psi_q \rangle|^2}{\varepsilon_q - \varepsilon_p}. \quad (2c)$$

¹⁵ T. HUUS, J. BJERREGAARD u. E. ELBEK, K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd. **30**, 17 [1956].

¹⁶ B. MOTTOLSON u. S. NILSSON, Phys. Rev. **99**, 1615 [1955].

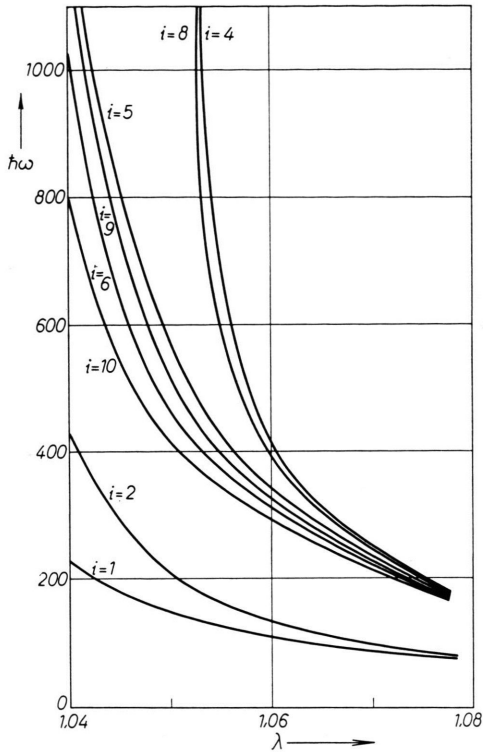


Abb. 3. Trägheitsmomente verschiedener Konfigurationen des ${}^{94}_{66}\text{Dy}$, berechnet nach Gl. (2 b). Die Funktionen Φ^i sind im Text (Abschnitt I, 2) beschrieben.

Die Matrixelemente $|\langle \psi_p | j_x | \psi_q \rangle|$ sind für vier verschiedene Deformationen numerisch berechnet worden; die Abb. 4 a – d zeigen die Größen

$$\tau_{pq} = \left| \frac{\langle \psi_p | j_x | \psi_q \rangle}{\varepsilon_q - \varepsilon_p} \right|.$$

Wenn wir nun mit Hilfe von (2 c) Trägheitsmomente von g – g-Kernen berechnen wollen, müssen wir uns überlegen, daß unsere Rechnungen nur dann sinnvoll sein können, wenn die Kerndeformation groß genug ist: Wir vernachlässigen nämlich in den Energienennern die Paarbildungsenergie, die größenordnungsmäßig $1,5 \text{ MeV} \approx 0,2 \hbar \omega$ beträgt. Wenn für wichtige Summanden in (2 c) die Energienenner kleiner als diese Paarbildungsenergie sind, erhalten wir sicher ein unsinnig großes Trägheitsmoment. Wir werden dann den betreffenden Kern aus der Betrachtung ausschließen.

Für die g – g-Kerne aus dem Bereich der seltenen Erden, mit denen wir uns nun befassen wollen, schreiben wir unsere Annahmen über die Konfiguration an; dabei soll zugleich mit einem Einteilchenzustand zum Eigenwert j_z auch der Zustand zu $-j_z$

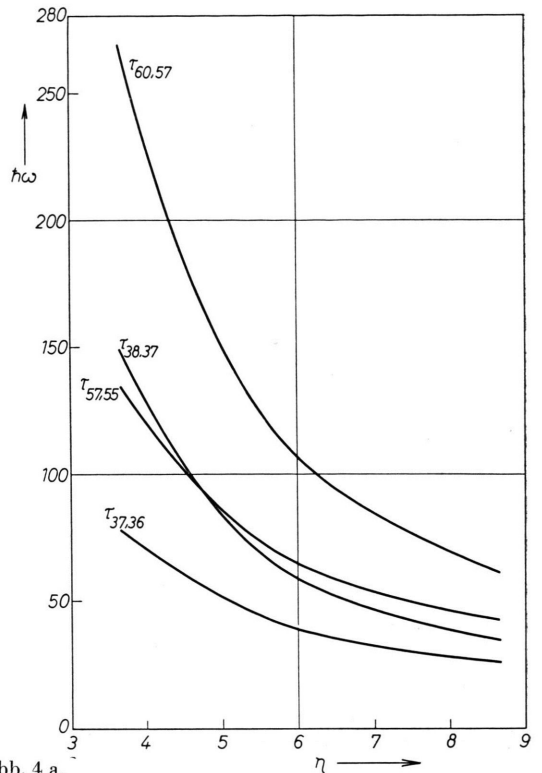


Abb. 4 a.

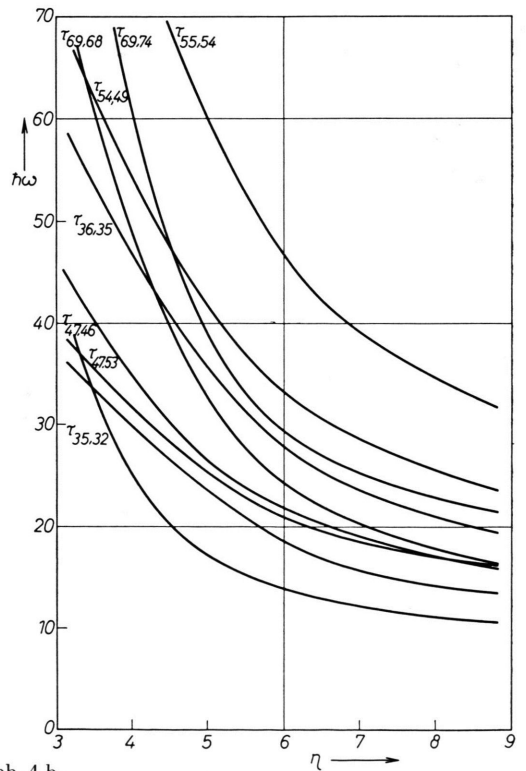


Abb. 4 b.

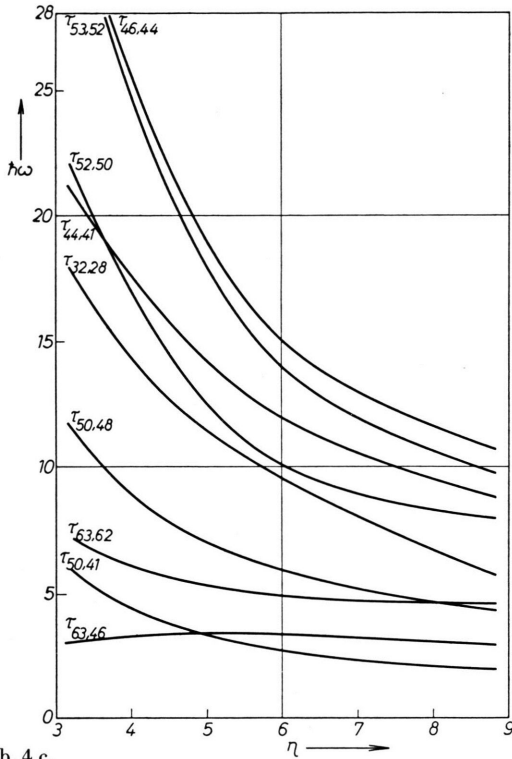


Abb. 4 c.

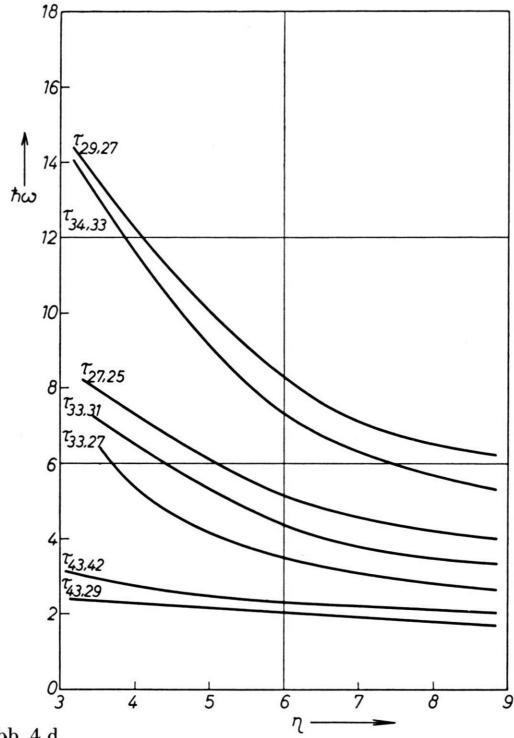


Abb. 4 d.

Abb. 4 a—d. Wichtige Summanden der INGLISCHEN Summe (2 c).

besetzt sein. Ferner seien — wenn nichts anderes gesagt ist — alle Protonenzustände der Schalen 0–3 und alle Neutronenzustände der Schalen 0–4 besetzt; alle darüber hinaus besetzten Zustände

werden angeschrieben, und zwar in der ersten Zeile die Protonenzustände, in der zweiten Zeile die Neutronenzustände mit ihrer Nummer im NILSSONSCHEM Schema.

$^{62}\text{Sm}^{92}$	24, 30, 34	23, 29	22	21	18	38	37	36
	38, 47, 53	37, 46	36	35	32	60	57	55
$^{64}\text{Gd}^{92}$	24, 30, 34	23, 29, 33	22, 27	21		38	37	36
	38, 47, 53	37, 46	36	35	32	60	57	55
$^{64}\text{Gd}^{94}$	24, 30, 34	23, 29, 33	22, 27	21		38, 47	37	36
	38, 47, 53	37, 46, 52	36, 44	35	32	60, 69	57	55
Die Neutronenzustände 51 und 42 seien nicht besetzt.								
$^{66}\text{Dy}^{94}$	24, 30, 34	23, 29, 33	22, 27	21	18	38	37	36
	38, 47, 53	37, 46, 52	36	35	32	60	57	55
$^{66}\text{Dy}^{96}$	24, 30, 34	23, 29, 33	22, 27	21	18	38	37	36
	38, 47, 53	37, 46, 52	36, 44	35	32	60	57	55
$^{66}\text{Dy}^{98}$	24, 30, 34	23, 29, 33	22, 27	21		38, 47	37	36
	38, 47, 53	37, 46, 52	36, 44	35	32	60, 69	57	55
Die Neutronenzustände 51 seien nicht besetzt.								
$^{68}\text{Er}^{96}$	24, 30, 34	23, 29, 33	22, 27	21	18	38	37	36
	38, 47, 53	37, 46, 52	36, 44	35	32	60	57	55
$^{68}\text{Er}^{98}$	24, 30, 34	23, 29, 33	22, 27	21	18	38	37	36
	38, 47, 53	37, 46, 52	36, 44	35	32	60, 69	57	55
$^{68}\text{Er}^{100}$	24, 30, 34	23, 29, 33	22, 27	21	18	38	37	36
	38, 47, 53	37, 46, 52	36, 44	35	32	60, 69	57	55
$^{68}\text{Er}^{102}$	24, 30, 34	23, 29, 33	22, 27	21	18	38	37	36
	38, 47, 53, 63	37, 46, 52	36, 44	35	32	60, 69	57	55

${}_{70}\text{Yb}^{100}$	24, 30, 34, 43 38, 47, 53	23, 29, 33 37, 46, 52	22, 27 36, 44	21 35	18 32		38 60	37 57	36 55	35 54
${}_{70}\text{Yb}^{102}$	24, 30, 34, 43 38, 47, 53	23, 29, 33 37, 46, 52	22, 27 36, 44	21 35	18 32	28	38 60, 69	37 57	36 55	35 54
${}_{70}\text{Yb}^{104}$	24, 30, 34, 43 38, 47, 53, 63	23, 29, 33 37, 46, 52	22, 27 36, 44	21 35	18 32	28	38 60, 69	37 57	36 55	35 54
${}_{70}\text{Yb}^{106}$	24, 30, 34, 43 38, 47, 53, 63	23, 29, 33 37, 46, 52	22, 27 36, 44, 50	21 35	18 32	28	38 60, 69	37 57	36 55	35 54

Wir schreiben nun für diese Kerne an (Tab. 2):

a) das mit Hilfe von (15) aus den Experimenten ermittelte β_0 ,

b) das aus (2 c) gewonnene Trägheitsmoment Θ_{ber} ,

c) der aus dem Modell vorhergesagte Wert der ersten Anregungsenergie, der gleich $3\hbar^2/\Theta_{\text{ber}}$ ist,

d) die gemessene Anregungsenergie $3\hbar^2/\Theta_{\text{exp}}$.

	β_0	Θ_{ber}	$3\hbar^2/\Theta_{\text{ber}}$	$3\hbar^2/\Theta_{\text{exp}}$
${}_{62}\text{Sm}^{92}$	0,33	560 \hbar/ω	41 keV	83 keV
${}_{64}\text{Gd}^{92}$	0,41	470	49	89
${}_{64}\text{Gd}^{94}$	0,46	680	34	79
${}_{66}\text{Dy}^{94}$	0,35	490	47	86
${}_{66}\text{Dy}^{96}$	0,36	465	48	82
${}_{66}\text{Dy}^{98}$	0,41	680	34	76
${}_{68}\text{Er}^{96}$	0,33	475	48	90
${}_{68}\text{Er}^{98}$	0,33	680	34	80
${}_{68}\text{Er}^{100}$	0,33	630	37	80
${}_{68}\text{Er}^{102}$	0,33	640	36	80
${}_{70}\text{Yb}^{100}$	0,30	570	41	84
${}_{70}\text{Yb}^{102}$	0,31	770	30	78
${}_{70}\text{Yb}^{104}$	0,31	775	30	78
${}_{70}\text{Yb}^{106}$	0,31	760	31	78

Tab. 2.

3. Diskussion der Ergebnisse

a) Die vom Modell berechneten Trägheitsmomente sind zu groß; sie sind jedoch sämtlich kleiner als das Trägheitsmoment der starren Rotation.

b) Im allgemeinen beschreibt das Modell die Un-

gleichungen zwischen den Trägheitsmomenten verschiedener Kerne und spiegelt also auch den Anstieg der Trägheitsmomente mit wachsender Kernverformung wider.

c) Unsere Rechnung hängt wesentlich an den Annahmen über die Besetzung der untersten Niveaus der höchsten Schalen; dies ist sowohl bei der Berechnung der Trägheitsmomente wie der Deformationen entscheidend.

d) Um die Konsistenz der Störungsrechnung (2 c) zu prüfen, wurden aus (2) auch Glieder proportional Ω^4 berechnet. In unseren Beispielen sind sie stets klein gegenüber den Gliedern proportional Ω^2 – und zwar auch dann, wenn für $\hbar\Omega$ ein realistischer Wert eingesetzt wird.

e) Da das Trägheitsmoment so empfindlich von den Energienennern weniger Summanden aus (2 c) abhängt, darf gehofft werden, daß auch „schwache“ Zweiteilchenwechselwirkungen zusätzlich zu (4) das Trägheitsmoment stark senken. Das NILSSON-Potential ist wohl ein geeigneter Ausgangspunkt für die Einführung solcher zusätzlicher Wechselwirkungen.

Ich danke Herrn Prof. W. HEISENBERG für das rege Interesse, mit dem er diese Arbeit gefördert hat. Die Herren Prof. G. LÜDERS, Prof. K. W. FORD und Dr. W. BREINIG haben mir in zahlreichen Diskussionen wertvolle Anregungen gegeben. Herrn Prof. L. BIERMANN verdanke ich die Möglichkeit, mit Hilfe der Elektronischen Rechenmaschinen G 1 und G 2 umfangreiche numerische Rechnungen ausführen zu können.